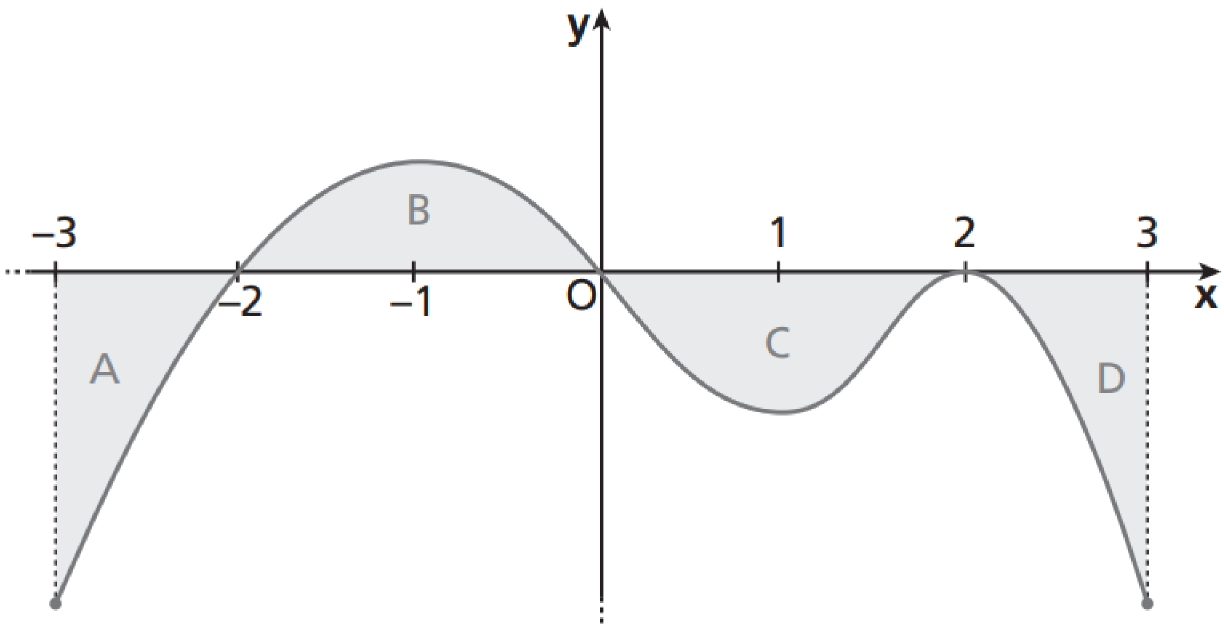
Liceo Scientifico "Dante Alighieri", Crema
Simulazione seconda prova maturità
14 maggio 2022

Tempo a disposizione: 6 ore. **Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.**

PROBLEMA 1
La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3; +3]$, il grafico Γ, disegnato in figura



Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni A, B, C e D sono rispettivamente 2, 3, 3, e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.

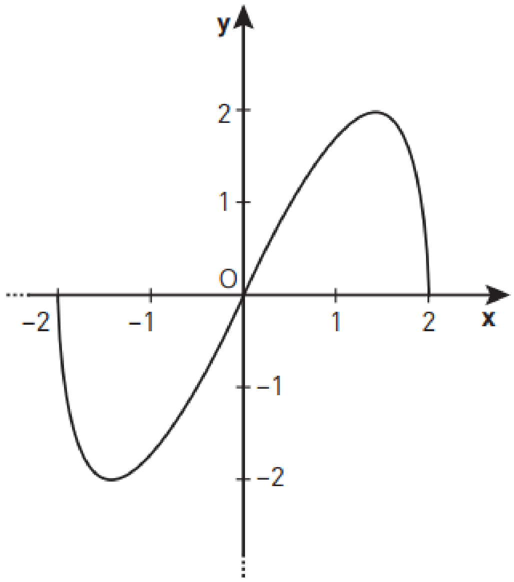
1. Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.

2. Individua i valori di $x \in [-3; +3]$ per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.

3. Calcola $g(0)$ e, usando il teorema di De l'Hopital, verifica $\lim_{x \to 0} \frac{1+g(x)}{2x} = 0$.

PROBLEMA 2

La funzione $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ è rappresentata dal grafico Γ.



1. Si calcolino il massimo e il minimo assoluti di $f(x)$.

2. Si dica, dimostrandolo in caso affermativo, se l'origine O è centro di simmetria per Γ.

3. Si rappresenti il grafico della funzione $f'(x)$.

4. Sia $h(x) = sen(f(x))$ con $0 \leq x \leq 2$. Quanti sono i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1?

QUESTIONARIO. Scegliere 4 dei seguenti 8 questiti e svolgerli.

1. Il valor medio della funzione $f(x) = x^3$ sull'intervallo chiuso $[0; k]$ è 9. Si determini k.

2. Del polinomio di quarto grado $P(x)$ si sa che assume il suo massimo valore 3 per $x = 2$ e $x = 3$ e, ancora, che $P(1) = 0$. Si calcoli $P(4)$.

3. Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{3 - log_2(x + 5)}$.

4. Data la funzione $f(x) = |4 - x^2|$ verificare che essa non soddisfa tutte le ipotesi di Rolle nell'intervallo $[-3; 3]$ e che comunque esiste almeno un punto dell'intervallo $[-3; 3]$ in cui la derivata prima di $f(x)$ si annulla.

5. Data la funzione $f(x) = |x^2 - 9|$, stabilisci se è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo $[-1; 2]$ e, in caso affermativo, determina i punti c di cui il teorema garantisce l'esistenza.

6. Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ divide in due porzioni il rettangolo ABCD avente vertici $A(1; 0)$, $B(4; 0)$, $C(4; 2)$, e $D(1; 2)$. Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.

7. Data la funzione $f(x) = e^x(2x + x^2)$, individuare la primitiva di $f(x)$ il cui grafico passa per il punto $(1; 2e)$.

8. Determinare l'equazione parametrica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazione $x + y - z = 0$.

9. Determinare a in modo che $\int_a^{a+1}(3x^2 + 3)dx$ sia uguale a 10.

10. Si risolva l'equazione $4\binom{n}{4}=15\binom{n-2}{3}$.